

Olimpiada Națională de Matematică 2003

Al șaselea test de selecție pentru OIM – 20 iunie 2003

Problema 1.

Fie $ABCDEF$ un hexagon convex. Notăm cu A', B', C', D', E', F' mijloacele laturilor AB, BC, CD, DE, EF, FA respectiv. Se cunosc ariile triunghiurilor $ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'$.

Să se afle aria hexagonului $ABCDEF$.

Problema 2.

O permutare $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ se numește *strânsă* dacă pentru orice $k = 1, 2, \dots, n - 1$ avem

$$|\sigma(k) - \sigma(k + 1)| \leq 2.$$

Să se găsească cel mai mic număr natural n pentru care există cel puțin 2003 permutări strânse.

Problema 3.

Pentru orice număr natural n notăm cu $C(n)$ suma cifrelor sale în baza 10. Arătați că oricare ar fi numărul natural k există un număr natural m astfel încât ecuația $x + C(x) = m$ are cel puțin k soluții.

Țimp de lucru 4 ore